TOP 02

THÉORÈME DE LA MOYENNE DE CESARO.

Les fichiers TOP sont réservées aux étudiants qui préparent le Top 5. Ils sont plus difficiles et demandent déjà une bonne maîtrise du reste du programme (cours, exercices, TD et méthodes). Même si le contenu de ces exercices dépasse le cadre du programme de ECG2, ils peuvent inspirer une série de questions d'un texte de concours.

Cet exercice concerne le chapitre 01 (suites).

Exercice 1.-
Partie A.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et convergente de limite ℓ. On pose pour tout entier n non nul

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

1. a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} (u_{n+1} - u_k)$.

b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2. a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant \ell$.

b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

3. Que peut-on en déduire pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_{2n} \geqslant \frac{u_n+v_n}{2}$.

5. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Partie B.

On admet que, si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ, alors on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j = \ell.$$

On pourra essayer de le démontrer mais c'est vraiment difficile.

On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_1 \in [0,1[$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n non nul n : $u_{n+1} = \frac{u_n^2+1}{2}$.

1. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.

2. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $v_n = 1 - u_n$.

a. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n}\right)$.

b. Étudier la convergence de la suite $(nv_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

c. En déduire que $u_n = 1 - \frac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{n}\right)$.

Pour que cet exercice soit profitable, il n'est pas recommandé d'utiliser la correction trop tôt. La *recherche* de la solution a beaucoup plus d'intérêt que la solution elle-même.

Correction 1.-
Partie A.

1. a. On a d'une part

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1}}{n+1} - \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n} \\ &= \frac{n(u_1 + u_2 + \cdots + u_n + u_{n+1})}{n(n+1)} - \frac{(n+1)(u_1 + u_2 + \cdots + u_n)}{n(n+1)} \\ &= \frac{(n-(n+1))u_1 + (n-(n+1)u_2 + \cdots + (n-(n+1))u_n}{n(n+1)} + \frac{u_{n+1}}{(n+1)} \\ &= \frac{-u_1 - u_2 - \cdots - u_n}{n(n+1)} + \frac{u_{n+1}}{(n+1)}. \end{aligned}$$

Regardons maintenant la somme (bien noter que $\sum_{k=1}^n u_{n+1}$ est une somme sur k de nombres *qui ne dépendent pas de* k).

$$\frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^n (u_{n+1} - u_k) = \frac{n}{n(n+1)}u_{n+1} - \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^n u_k = \frac{1}{n+1}u_{n+1} - \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=1}^n u_k.$$

Les deux quantités coincident donc.

b. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, chaque terme $u_{n+1} - u_k$ (pour tout k) est positif. Donc $v_{n+1} - v_n \geqslant 0$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2. a. Une suite croissante qui converge est toujours inférieure à sa limite. C'est presque évident mais montrons le proprement. Raisonnons par l'absurde et supposons donc que *pour un certain* n_0 (la négation de pour tout n, on a la propriété $\mathcal{P}(n)$ est il existe n_0 tel qu'on n'ait pas $\mathcal{P}(n)$) $u_{n_0} > l$. Alors puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a, pour $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant u_{n_0}$. Puis, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, on obtient $\ell \geqslant u_{n_0} > l$ et la contradiction cherchée.

b. Prenons l'expression

$$v_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k.$$

Chacun des termes de la somme est donc inférieur à ℓ d'après la question précédente. Donc

$$v_n \leqslant \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \ell = \frac{n\ell}{n} = \ell.$$

3. On en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge car elle est croissante et majorée (théorème de la convergence monotone).

4. On a

$$\begin{aligned} v_{2n} &= \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{2n} u_k \\ &= \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=1}^n u_k + \sum_{k=n+1}^{2n} u_k\right) \\ &\geqslant \frac{1}{2}v_n + \frac{1}{2n}\sum_{k=n+1}^{2n} u_n. \end{aligned}$$

En effet pour chaque $k > n$, on a $u_k \geqslant u_n$ car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On obtient donc
$$v_{2n} \geqslant \frac{1}{2}(v_n) + \frac{nu_n}{2n} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

5. Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $v_n \leqslant \ell$ pour tout n, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n \leqslant \ell$. La question précédente va nous servir à montrer l'inégalité inverse. On a $\lim\limits_{n\to+\infty} v_{2n} = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$. Ainsi en passant à la limite dans l'inégalité de la question **4.**, on obtient
$$\lim_{n\to+\infty} v_n \geqslant \frac{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n + \ell}{2},$$
d'où
$$\frac{\lim\limits_{n\to+\infty} v_n}{2} \geqslant \frac{\ell}{2}$$
ou encore
$$\lim_{n\to+\infty} v_n \geqslant \ell.$$
En combinant les deux inégalités, on obtient $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell$.

Partie B.

1. On cherche à appliquer le théorème de convergence monotone. Montrons que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée. On a
$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 1}{2} - u_n = \frac{u_n^2 + 1 - 2u_n}{2} = \frac{(u_n - 1)^2}{2} \geqslant 0.$$
Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

Montrons par récurrence sur n que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par 1. Pour l'initialisation, c'est immédiat, u_0 est donné inférieur à 1. Pour l'hérédité, supposons que $u_n \leqslant 1$ pour un certain entier n. Alors
$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2} \leqslant \frac{1^2 + 1}{2} = 1.$$

2. **a.** On a
$$\begin{aligned}
\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} &= \frac{1}{1 - u_{n+1}} - \frac{1}{1 - u_n} \\
&= \frac{1}{1 - \frac{1+u_n^2}{2}} - \frac{1}{1 - u_n} \\
&= \frac{1}{\frac{1-u_n^2}{2}} - \frac{1}{1 - u_n} \\
&= \frac{2}{1 - u_n^2} - \frac{1}{1 - u_n} \\
&= \frac{2}{1 - u_n^2} - \frac{1 + u_n}{(1 + u_n)(1 - u_n)} \\
&= \frac{2 - 1 - u_n}{1 - u_n^2} \\
&= \frac{1 - u_n}{1 - u_n^2} \\
&= \frac{1}{1 + u_n}
\end{aligned}$$

Maintenant on sait que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 1. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{v_{n+1}}-\frac{1}{v_n}\right)=\frac{1}{2}.$$

b. Les deux dernières questions sont un peu plus difficiles. On utilise maintenant le résultat admis au début de la partie B : On sait que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{v_{k+1}}-\frac{1}{v_k}\right)=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{v_{n+1}}-\frac{1}{v_n}\right)=\frac{1}{2}$$

Or la somme est une somme télescopique et on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{v_{k+1}}-\frac{1}{v_k}\right)=\frac{1}{nv_{n+1}}-\frac{1}{nv_1}.$$

On voudrait maintenant prendre un équivalent mais on n'a pas le droit de sommer des équivalents. Alors écrivons plutôt

$$\frac{1}{nv_{n+1}}-\frac{1}{nv_1}=\frac{1}{2}+\underset{n\to+\infty}{\mathbf{o}}(1).$$

Puis

$$\frac{1}{nv_{n+1}=\frac{1}{2}}+\underset{n\to+\infty}{\mathbf{o}}(1)+\frac{1}{nv_1}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2}.$$

Et par ailleurs

$$\frac{1}{nv_{n+1}}\sim n\to+\infty\frac{1}{nv_n}.$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{nv_n}=\frac{1}{2}$ donc que $\lim\limits_{n\to+\infty}(nv_n)=2$

c. On a

$$nv_n=n-nu_n=2+\underset{+\infty}{\mathbf{o}}(1).$$

Donc

$$nu_n=n-2+\underset{+\infty}{\mathbf{o}}(1).$$

Puis, en divisant par n (attention aux règles sur les $\mathbf{o}()$)

$$u_n=1-\frac{2}{n}+\underset{+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{n}\right).$$